



## PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS $H_2$ E $H_\infty$ POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS ATRAVÉS DA ABORDAGEM POR LMIS

**Rafael Facioni Scalabrin** – [rafaell.facioni@hotmail.com](mailto:rafaell.facioni@hotmail.com)

**Rodrigo Farias Araújo** – [rfarauju@hotmail.com](mailto:rfarauju@hotmail.com)

**Almir Kimura Junior** – [akimurajr@gmail.com](mailto:akimurajr@gmail.com)

**Charles Luiz Silva de Melo** – [charles.melo@yahoo.com.br](mailto:charles.melo@yahoo.com.br)

Universidade do Estado do Amazonas, Escola Superior de Tecnologia

Av. Darcy Vargas, 1200

69055-035 – Manaus – Amazonas

**Resumo:** Este artigo apresentará a abordagem através de desigualdades matriciais lineares (LMIs) para o projeto de controladores de realimentação de estados robustos, conhecidos na literatura como controladores  $H_2$  e  $H_\infty$ , tendo como meta a aplicação nos experimentos, pêndulo invertido sobre o carro e Ball and Beam. O procedimento baseia-se na obtenção dos controladores a partir dos modelos dos experimentos no espaço de estados. A síntese dos controladores é feita a partir de um problema de otimização, sujeito a restrições LMIs para alocação de polos e energia do sinal de controle, que busca o controlador ótimo, dentre um conjunto de controladores estabilizantes, que minimize a norma  $H_2$  e  $H_\infty$ . O procedimento proposto foi aplicado em modelos simulados no Simulink(MATLAB), no qual foram implementados os controladores obtidos. Para melhor verificação de desempenho dos controladores para aplicação nos experimentos reais, foram escolhidos os controladores que atendem as especificações de desempenho desejadas, tendo como expectativa a estabilização dos experimentos com menor oscilação e tempo possíveis.

**Palavras-chave:** Controlador  $H_2$ , Controlador  $H_\infty$ , Norma  $H_2$ , Norma  $H_\infty$ , Desigualdade Matricial Linear (LMI).

### 1. INTRODUÇÃO

O primeiro trabalho significativo em controle automático foi o de James Watt, que construiu um controle centrífugo para o controle de velocidade de uma máquina a vapor no século XVIII. Durante a década de 1940 e início da de 1950 os métodos de resposta em frequência e lugar das raízes permitiam aos engenheiros desenvolverem projetos de controle de modo que o sistema em malha fechada atendesse certos requisitos de desempenho.

Por volta de 1960 começou a ser desenvolvida a Teoria de Controle Moderno, está se aplica a sistemas com entradas e saídas múltiplas, lineares e não lineares, variantes ou invariantes no tempo, além disso, é uma abordagem essencialmente no domínio do tempo.

No entanto, no final da década de 1970 e ao longo da década de 1980, começou-se a perceber a necessidade de desenvolvimento de controladores robustos, ou seja, todo controlador deveria ser capaz de assegurar um desempenho em malha fechada satisfatório, ainda que o processo a ser controlado tenha diferenças significativas de comportamento em comparação com o modelo matemático utilizado durante a etapa de projeto.

A necessidade de tal propriedade de robustez surgiu devido a três tipos de situações, que vinham se mostrando desafiadoras para as técnicas de controle anteriormente existentes. A primeira dizia respeito à robustez dos processos com respeito a diferentes tipos de distúrbios. A segunda situação dizia respeito a processos cujo modelo matemático seria variável ou de elevada complexidade, que se impossibilita a obtenção de um modelo preciso. Ao longo de sua vida, um processo poderia mudar de dinâmica em virtude, por exemplo, do desgaste de componentes, ou ainda devido a diferentes condições de operação. Por fim, a terceira situação dizia respeito à fabricação em série de sistemas que requeriam controladores para funcionar.

Este artigo será focado na resolução da primeira situação descrita, de forma que os controladores deverão ser capazes de estabilizar um sistema mediante a aplicação de diferentes tipos de distúrbios.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

Para os testes práticos no pêndulo invertido sobre o carro foi utilizada a plataforma de teste IP02 acoplada a uma haste calibrada.

O IP02 é um carrinho que executa movimentos lineares sobre um trilho através de uma cremalheira e um pinhão, que transmite o torque desenvolvido pelo servo-motor DC ao carrinho. Além disso, há dois *encoders* rotativos incrementais, que servem para fazer as medições das posições do carrinho no trilho e da posição angular da haste. Com relação à haste, a mesma é acoplada ao IP02 por meio de um eixo perpendicular à direção do movimento do carrinho. A figura a seguir ilustra o sistema IP02 com a haste acoplada.



Figura 1 – Plataforma IP02 acoplada à haste.

Já para os testes práticos no experimento *Ball and Beam* foram utilizados os módulos SRV02 e BB01 fornecidos pela *Quanser*.

O módulo SRV02 é constituído de um servo-motor DC montado em base de alumínio sólido e ligado por meio de engrenagens a um eixo de saída. O eixo está equipado com um *encoder* rotativo incremental, para medição do ângulo de atuação do servo. A figura 2 ilustra o módulo SRV02.



Figura 2 – Módulo SRV02.

O módulo BB01 é constituído de um elemento plástico condutor montado sobre uma viga de alumínio sólido. A estrutura está articulada numa extremidade a uma base de alumínio sólido e está ligado a um braço articulado na outra extremidade. O braço articulado pode ser facilmente ligado a uma unidade de movimento giratório resultando assim na capacidade para controlar a inclinação da viga usando um servo-motor, conforme ilustra a figura a seguir.



Figura 3 – Módulo BB01.

O *Ball and Beam* montado para os teste é mostrado na figura 4.

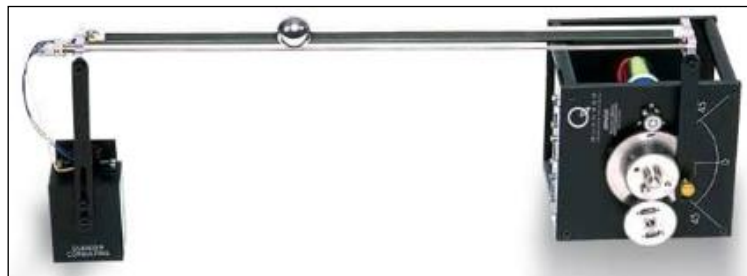


Figura 4– Ball and Beam.

A leitura dos dados gerados pelos *encoders* e sensores bem como o acionamento do servo motor DC, para os dois experimentos, é realizada por intermédio de uma placa que dispõe de conversores A/D (analógico/digital) e D/A (digital/analógico). Essa placa se comunica com o computador através de uma placa de aquisição de dados denominada Q4 fornecida pela *Quanser*.

A interface entre a placa de aquisição de dados e o *Simulink* é feita pelo *software QUARC*, que também é fornecido pela *Quanser*. Com ele, é possível controlar as plantas diretamente através do *Simulink*.

## 2.1 Metodologia para o Projeto dos Controladores

Os controles  $H_2$  e  $H_\infty$ , consistem em encontrar uma matriz de ganhos de realimentação de estados  $K$ , que minimize as normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , respectivamente.

Geralmente o valor de  $K$  encontrado é muito elevado para que se obtenha uma norma ótima, o que na prática torna inviável sua implementação, além disso, os polos dominantes em malha fechada ficam alocados próximos da origem do plano complexo e polos não dominantes muito distantes. Dessa forma, é interessante adicionar LMIs que restrinjam a alocação dos polos em malha fechada do sistema, para que se atenda requisitos como, tempo de acomodação e máximo sobressinal para o caso de uma mudança de referência.

É possível utilizar o fluxograma descrito a seguir para a implementação prática dos experimentos, a fim de se obter dados reais para comparação com os dados simulados.

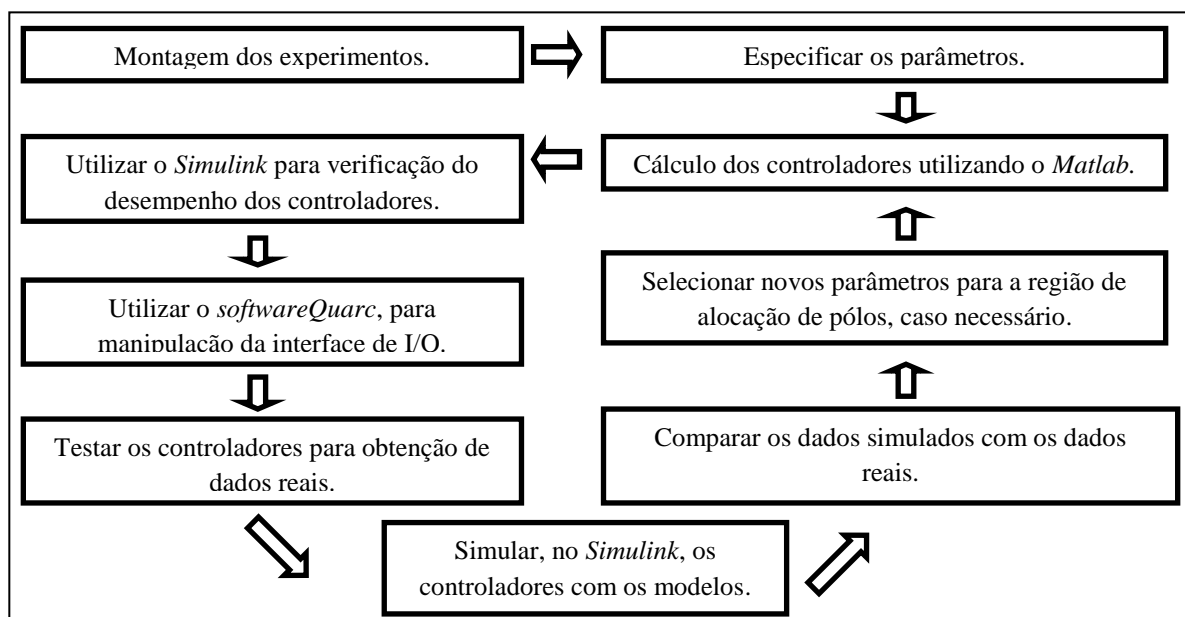


Figura 5 –Fluxograma da metodologia utilizada para implementação dos experimentos

## 2.2 Estabilização do Pêndulo Invertido Sobre Carro

O problema de equilíbrio do pêndulo invertido é de grande importância para a engenharia, por se tratar de um sistema dinâmico de difícil controle e que possui analogia com diversos problemas tais como, controle da posição de um foguete na fase de lançamento, controle de um braço robótico, controle da postura de uma pessoa ou mesmo um veículo elétrico de auto equilíbrio conforme mostrado na figura abaixo.



Figura 6 – Veículo elétrico de auto equilíbrio.

O principal objetivo do experimento pêndulo invertido sobre carro é estabilizar uma haste na posição vertical através da manipulação da posição do carro sobre o trilho, além disso, há a necessidade de que o sistema rejeite perturbações imposta a haste.

As matrizes da realização no espaço de estados para o pendulo invertido estão descritas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_p l_p^2 g}{k_p} & -\frac{(I_p + m_p l_p^2)(B_{eq} + 7,7443)}{k_p} & -\frac{m_p l_p B_p}{k_p} \\ 0 & \frac{(m_c + m_p)m_p l_p g}{k_p} & -\frac{m_p l_p (B_{eq} + 7,7443)}{k_p} & -\frac{(m_c + m_p)B_p}{k_p} \end{bmatrix}$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1,7265(I_p + m_p l_p^2)}{k_p} \\ \frac{1,7265 m_p l_p}{k_p} \end{bmatrix}; \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{I_p + m_p l_p^2}{k_p} \\ \frac{2m_c l_p + m_p l_p}{k_p} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 7 – Matrizes da realização no espaço de estados para o pendulo invertido.

Os dados do experimento são expressos por:

- massa do pêndulo (haste):  $m_p = 0,127 \text{ kg}$





- massa do carro:  $m_c = 1,0731 \text{ kg}$
- momento de inércia:  $I_p = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- comprimento do pêndulo (haste):  $l_p = 0,1778 \text{ m}$
- aceleração da gravidade:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- $k_p = (m_c + m_p)I_p + m_c m_p l_p^2 \Rightarrow k_p = 0,0057$
- coeficiente de amortecimento viscoso, em relação á haste:  $B_p = 0,0024 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$
- coeficiente de amortecimento viscoso, em relação ao pinhão do motor:  $B_{eq} = 5,4 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$

Substituindo os dados nas matrizes da realização no espaço de estados para o pêndulo invertido, obtém-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,8701 & -11,9242 & -0,0094 \\ 0 & 46,2458 & -51,6325 & -0,501 \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5662 \\ 6,7819 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,4897 \\ 70,3104 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 8 – Matrizes da realização no espaço de estados com valores substituídos.

Onde as variáveis de estados são:

$x_1$ : posição do carro no trilho

$x_2$ : posição angular do pêndulo em relação ao eixo vertical

$x_3$ : velocidade do carro no trilho

$x_4$ : velocidade angular do pêndulo

Pode-se notar, através da matriz  $C$ , que apenas as variáveis de estados  $x_1$  e  $x_2$  estão disponíveis para medição, logo se faz necessário o projeto de um observador de estados para a estimação das variáveis de estados restantes, visto que o controle é feito por realimentação de estados.

Para o projeto dos controladores foram escolhidos 4 conjuntos de parâmetros para as restrições de alocação de polos e de energia do sinal de controle. A tabela a seguir mostra esses conjuntos utilizados para os cálculos dos controladores.

Tabela 1 –Parâmetros para restrições de alocação de pólos do experimento Pêndulo Invertido.

Conjunto	1°	2°	3°
$r$	4	10	15
$q$	9	15	20
$\mu$	80	30	60

A partir dos valores da tabela 1 foram obtidos os valores para os controladores e normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , os polos do sistema controlado, as matrizes  $L$  do observador de estados e os pólos do observador.

A seguir é apresentado o diagrama em blocos utilizado para simulação do experimento Pêndulo Invertido sobre carro no *software Simulink*.

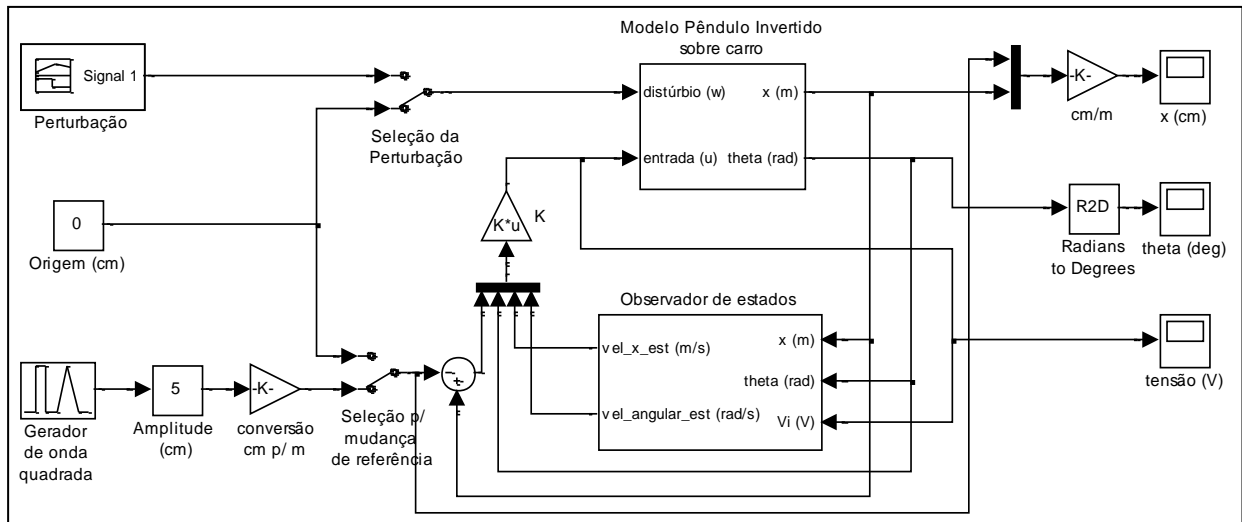


Figura 09– Diagrama em blocos do sistema Pêndulo Invertido sobre carro simulado.

### 2.3 Estabilização do Experimento Ball And Beam

O experimento *Ball and Beam* também é associado a problemas de controle reais, como por exemplo, a estabilização horizontal de uma aeronave durante o pouso ou na presença de fluxo turbulento de ar. A figura abaixo ilustra uma aeronave a ser estabilizada.



Figura 10 – Aeronave.

O principal objetivo no projeto de controladores para o experimento *Ball and Beam* é estabilizar uma bola em uma determinada posição da trave, através da manipulação da posição angular do servo, em segundo plano há a necessidade de que o sistema rejeite perturbações impostas à posição da bola.

Para o experimento *Ball and Beam* não é recomendado a utilização de um controlador de realimentação completa de estados, pois há a necessidade de manter o sistema na região linear, garantindo que a posição angular do servo motor se mantenha dentro de uma faixa. Assim, o sistema será dividido em duas malhas de controle, a malha de controle interna terá o objetivo de controlar o ângulo do servo para que não ultrapasse a região linear, e a malha externa será responsável por controlar a posição da bola na trave. Foi introduzido um elemento não linear para saturar o ângulo de forma que este permaneça entre  $0,65 \text{ rad}$  e  $-0,65 \text{ rad}$ .

A seguir é apresentado o diagrama em blocos utilizado para simulação do experimento *Ball and Beam* no software *Simulink*.

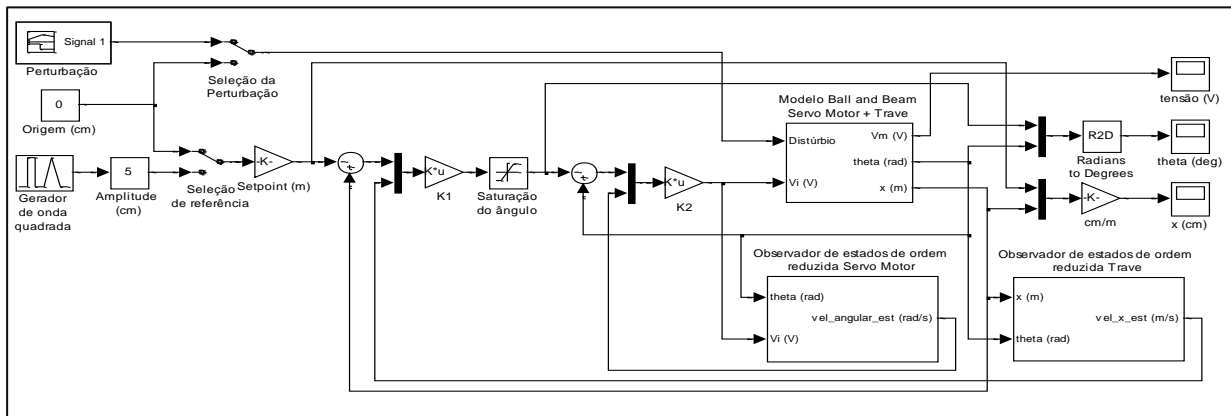


Figura 11 – Diagrama em blocos do sistema Ball and Beam simulado.

O sistema foi então dividido em dois subsistemas de segunda ordem, o primeiro referente ao servo motor, o qual gera um ângulo de acordo com a tensão de entrada e o segundo diz respeito à trave, que tem como entrada o ângulo gerado pelo servo motor e sua saída será a posição da bola na trave.

As matrizes de realização no espaço de estados para os dois subsistemas descritos podem ser observadas na figura 10 para o servo motor e na figura 11 para a trave.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{\tau} \end{bmatrix}; B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C == [1 \quad 0]$$

Figura 12 – Matrizes de realização no espaço de estados para o servo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{bb} \end{bmatrix}; B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{7m_b} \end{bmatrix}$$

$$C == [1 \quad 0]$$



Figura 13 – Matrizes realização no espaço de estados para a trave.

Os dados do experimento *Ball and Beam* encontrados são expressos por:

- raio da bola:  $r_b = 0,0127 \text{ m}$
- massa da bola:  $m_b = 0,064 \text{ kg}$
- momento de inércia:  $J_b = 4,13 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- comprimento da trave:  $L = 0,425 \text{ m}$
- aceleração da gravidade:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- distância do centro da engrenagem até a junta:  $r = 0,0254 \text{ m}$
- $k_{bb} = (m_b g r r_b^2) / (L(m_b r_b^2 + J_b)) \Rightarrow k_{bb} = 0,4184 \text{ m/s}^2 \text{ rad}$
- constante de tempo do servo motor:  $\tau = 0,0285$
- ganho do servo motor:  $k = 1,7588$

Substituindo-se os dados na representação em espaço de estados, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -35,0877 \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 61,7123 \end{bmatrix}; B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C == [1 \quad 0]$$

Figura 14 – Matrizes da representação do servo com valores substituídos.

Onde as variáveis de estados para o sistema do servo motor são:

- $x_1$ : posição angular do servo
- $x_2$ : velocidade angular do servo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4184 \end{bmatrix}; B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C == [1 \quad 0]$$

Figura 15 – Matrizes da representação da trave com valores substituídos.

Onde as variáveis de estados para o sistema da trave são:

- $x_1$ : posição da bola na trave
- $x_2$ : velocidade da bola

Da mesma forma que no experimento do pêndulo invertido sobre carro, pode-se notar, através da matriz  $C$  dos sistemas, que apenas as variáveis de estados  $x_1$ , posição angular do servo e posição da bola na trave estão disponíveis para medição, logo se faz necessário o projeto de um observador de estados para cada sistema para estimação das variáveis de

estados restantes. A matriz  $L$  do observador de cada sistema será calculada de forma a alocar os polos do observador cinco vezes mais rápidos que o do sistema realimentado.

Para as simulações do experimento foram escolhidos 3 conjuntos de os parâmetros que restringem a locação de pólos e energia do sinal de controle.

A tabela 2 mostra os conjuntos de parâmetros para o sistema do servo motor.

Tabela 2 – Parâmetros para restrições de alocação de polos do sistema do servo motor.

Conjunto	1º	2º	3º
$\sigma_{min}$	-5	-7	-10
$\sigma_{max}$	-1	-2	-4
$\mu$	20	15	30

Os parâmetros para restrições de alocação de polos do sistema da trave são mostrados na tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros para restrições de alocação de polos do sistema da trave.

Conjunto	1º	2º	3º
$\sigma_{min}$	-5	-7	-8
$\sigma_{max}$	-1	-2	-3
$\mu$	8	5	6

A partir dos valores da tabela 1 foram obtidos os valores para os controladores e normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , os polos do sistema controlado, as matrizes  $L$  do observador de estados e os polos do observador.

### 3. ANALISE DOS RESULTADOS

A seguir serão discutidos os resultados obtidos para na simulação e a aplicação prática dos controladores  $H_2$  e  $H_\infty$ , para a mudança de referência e para a perturbação.

#### 3.1 Pêndulo Invertido Sobre Carro

Para verificação do desempenho dos controladores calculados foram feitas simulações para uma mudança de referência desejada, variando entre  $5cm$  e  $-5cm$  a posição do carro, e na presença de distúrbios, onde foi aplicada uma força de  $0,05N$  na extremidade do pêndulo, na direção positiva, com duração de  $1s$ .

Para os conjuntos de parâmetros simulados o controlador  $H_\infty$  teve melhor desempenho que controlador  $H_2$ . Característica comprovada pelo fato do controlador  $H_\infty$  tender a apresentar melhores resultados para distúrbios possuem energia limitada, e o controlador  $H_2$  apresenta melhores resultados para distúrbios de natureza estocástica e quanto ocorrem variações nos parâmetros da planta. Com relação à mudança de referência ambos



tiveram desempenho satisfatório para os requisitos de tempo de acomodação em torno de 1,5 s e com sobressinal nulo.

No entanto, O controlador  $H_\infty$  apresentou uma grande sensibilidade a distúrbios, o que poderia danificar os componentes do equipamento de teste, já que para o sistema responder de forma rápida é necessário que o carro se desloque com grande velocidade.

Logo restou o controlador  $H_2$ , que quando implementado apresentou boa rejeição a distúrbios e conseguiu atender aos requisitos quanto à mudança de referência.

### 3.2 Ball and Beam

Para o experimento *Ball and Beam*, foram feitas simulações para uma mudança de referência desejada, variando entre 5cm e -5cm a posição da bola, e na presença de distúrbios, uma força de 0,01 N.

Os resultados obtidos mostraram que o controlador escolhido atuou muito bem quando impostas perturbações no sistema, porém dentro das limitações o mesmo, já que o ângulo da trave saturou quando aplicado perturbações de maior intensidade.

Para a mudança de referência a posição apresentou um pequeno erro em regime estacionário. No entanto o comportamento foi satisfatório com tempo de acomodação conforme o esperado e o sobressinal apresentado sendo nulo para os resultados práticos.

## 4. CONCLUSÃO

Neste artigo foi apresentada a aplicação prática, com sucesso, do procedimento de cálculo de controladores de realimentação de estados robustos  $H_2$  e  $H_\infty$  utilizando a abordagem por LMIs, nas plantas experimentais de pêndulo invertido sobre carro e *Ball and Beam* da fabricante *Quanser*.

A metodologia de cálculo dos controladores  $H_2$  e  $H_\infty$ , obtidos através da abordagem por LMIs, mostrou-se muito eficiente. Já que para o projeto de controladores de realimentação de estados clássico os ganhos são encontrados impondo-se os polos em malha fechada da planta e esta metodologia consiste em encontrar os ganhos de realimentação de estados ótimos para uma região específica de alocação de polos no plano complexo. Além disso, é de fácil implementação, pois está disponível no *software Matlab* o *toolbox LMITool*, que possibilita a resolução do problema de otimização utilizando a abordagem por LMIs.

## 5. REFERÊNCIAS

AGUIRRE L. A. et al. **Enciclopédia de automática: Controle e automação**, volume 1. Editora Blucher, São Paulo, 2007.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**, 4ª ed, Prentice Hall do Brasil, 2004.



AGUIRRE L. A. et al. **Enciclopédia de automática: Controle e automação**, volume 2. Editora Blucher, São Paulo, 2007.

PALHARES, R. M. **Aulas de controle robusto via otimização**. 2012.

ZHOU, K.; DOYLE J. C.; GLOVER K. **Robust and optimal control**. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

QUANSER. **User manual – Linear Motion Servo Plants: IP01 e IP02**.

QUANSER. Disponível em: <<http://www.quanser.com>>. Acesso em: 01 de junho de 2012.

QUANSER. **User manual – Rotary Motion Servo Plant: SRV02**.

QUANSER. **Single Inverted Pendulum (SIP)**.

QUANSER. **Ball and Beam Position Control**.

## **DESIGN OF ROBUST CONTROLLERS $H_2$ AND $H_\infty$ BY FEEDBACK STATES THROUGH THE APPROACH LMIS**

**Abstract:** *This article presents approach through of linear matrix inequalities (LMIs) for the design of controllers robust state feedback, known in the literature as controllers  $H_2$  and  $H_\infty$ , with a target application in the experiments, inverted pendulum on the cart and ball and beam. The procedure is based on obtaining the controllers from the models of the experiments, the state space. The synthesis of controllers is made from an optimization problem subject to LMI constraints for allocating poles and power control signal, which seeks the optimal controller, among a set of stabilizing controllers that minimize the norm  $H_2$  and  $H_\infty$ . The proposed procedure was applied in simulated models in Simulink(MATLAB), which were implemented in the controllers obtained. For best performance verification of controllers for application in real experiments, the controllers were chosen to meet the desired performance specifications, with the expected stabilization of the experiments with less oscillation and time possible.*

**Keywords:** *Controller  $H_2$ , Controller  $H_\infty$ , Norm  $H_2$ , Norm  $H_\infty$ , Linear Matrix Inequality (LMI).*